BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2013

RİYAZİYYAT

УДК 02.23.21

ТЕОРЕМА СОБОЛЕВА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА С ОБОБЩЕННЫМ СДВИГОМ И ПОЧТИ МОНОТОННЫМ ЯДРОМ

С.К.АБДУЛЛАЕВ, Б.К.АГАРЗАЕВ

Бакинский Государственный Университет

Sadig.Abdullaev@mail.ru

В работе, для обобщенных потенциалов Рисса, с почти монотонными ядрами, порожденных оператором обобщенного сдвига, ассоциированного с дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя, доказываются теоремы типа второй теоремы Соболева в случае, когда оператор обобщенного сдвига берется по произвольному набору переменных.

Ключевые слова: потенциал Рисса, обобщенный сдвиг, пространство Орлича, почти монотонное ядро

1. Пусть R^n - эвклидово пространство размерности $n\ (n \geq 1)$, $m \geq 0$, $k \geq 1$ – целые числа,

$$R^+_{m+k,k} = \{(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+k}) \in R_{m+k} : x_{m+1} > 0,\dots,x_{m+k} > 0\};$$

$$T^s u(x) = C_\nu \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi u\left(x' - s', \sqrt{x_{m+1}^2 - 2x_{m+1}s_{m+1}\cos\alpha_1 + s_{m+1}^2},\dots,\sqrt{x_{m+k}^2 - 2x_{m+k}s_{m+k}\cos\alpha_k + s_{m+k}^2}\right) \times$$

$\times \sin^{\nu_{m+1}-1}\alpha_1 \cdots \sin^{\nu_{m+k}-1}\alpha_k\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_k$ – оператор обобщенного сдвига, порожденный оператором Лапласа—Бесселя ([1]):

$$\Delta_{B_{m+k,k}}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{d^2}{dx_j^2} + \sum_{j=m+1}^{m+k}\left(\frac{d^2}{dx_j^2} + \frac{\gamma_j}{x_j}\frac{d}{dx_j}\right),\ x \in R^+_{m+k,k}, \gamma_{m+1} > 0,\dots,\gamma_{m+k} > 0,$$

$x = (x', x_{m+1},\dots,x_{m+k})$ $s = (s', s_{m+1},\dots,s_{m+k})$, $x', s' \in R_m$, $|\gamma_{k,n}| = \gamma_{m+1} + \dots + \gamma_{m+k}$,

C_ν - нормирующий множитель.

Для полноты рассуждений, при $k=0$ будем считать, что $R^+_{m+k,k} \equiv R^m$ и T^y –обычный сдвиг: $T^y = f(x-y)$.

Для $p \geq 1$ *и* $\alpha > 0$ через $\Omega_{p,\alpha}$ ($\tilde{\Omega}_{p,\alpha}$) обозначим ([2]) совокупность функций $\omega : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ таких, что $\omega(t)$ возрастает (почти возрастает), $t^{-\frac{\alpha}{p}+\varepsilon}\omega(t)$ убывает (почти убывает) при некотором $\varepsilon > 0$ и сходится интеграл $\int_0 \omega(t)t^{-1}\,dt$.

Отметим, что положительная функция $g(t)$ почти убывает (почти возрастает) на множестве $X \subset (0;+\infty)$, если существует постоянное $c > 0$ такое, что $g(t_2) \leq cg(t_1)$ $(g(t_1) \leq c\,g(t_2))$ при $t_1 < t_2$ для любых $t_1, t_2 \in X$.

Очевидно, что $\Omega_{p,\alpha} \subset \tilde{\Omega}_{p,\alpha}$ и если $\omega \in \tilde{\Omega}_{p,\alpha}$, то $\omega(2t) \leq t\omega(t), \quad > 0$. Кроме того, $\tilde{\Omega}_{p,\alpha} \subset \tilde{\Omega}_{1,\alpha}$ для $\forall p \geq 1, \forall \alpha > 0$.

Всюду в дальнейшем полагаем $(R^m)_\upsilon = R^m$, если $k=0$ (тогда и и $(R^m) = R^k_{m+k,k}$, если $k \geq 1$.

Для $\omega \in \tilde{\Omega}_{p,m+k+2|\nu|}$ рассмотрим обобщенный потенциал Рисса

$$(I), \quad x \in R^+_{m+k,k}, \quad d\mu(y) = y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \ldots y_{m+k}^{\nu_{m+k}} dy, \quad dy = dy_1 \ldots dy_{m+k}.$$

Потенциал Рисса I_B^ω в случае $\omega(t) = t^\alpha, \alpha > 0$, рассмотрен в ([3]).

Через $L_\nu^\Phi(R^+_{m+k,k})$ обозначим пространство Орлича ([4]), порожденное N – функцией Φ :

$$L_\nu^\Phi(R^+_{m+k,k}) = \left\{ f : изм. \int_{R^+_{m+k,k}} \Phi(\varepsilon |f(x)|) d\mu(y) < \infty, \varepsilon > 0 \right\},$$

$$\|f\|_{L_\nu^\Phi(R^+_{m+k,k})} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_{R^+_{m+k,k}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(y) \leq 1 \right\}.$$

При $\Phi(t) = |t|^p$, $t > 0$ *и* $1 \leq p < +\infty$ пространство $L_\nu^\Phi(R^+_{m+k,k})$ обозначим через $L_{p,\nu}(R^+_{m+k,k})$ – пространство функций, интегрируемых в р-ой степени с весом $y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \ldots y_{m+k}^{\nu_{m+k}}$.

Как известно ([5]), обобщенные потенциалы Рисса – Бесселя с нестепенными ядрами (даже обычные Рисовые потенциалы с такими ядрами [7]) не действуют, вообще говоря, в шкале $L_{p,\nu}$ пространств.

Из результатов работ ([5],[6])следует

Теорема А. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $\omega \in \tilde{\Omega}_{p,m+k+|\gamma_{k,n}|}$. Тогда существует $N-$функция Φ такая, что

$$C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right) \leq \frac{1}{r^{\frac{a}{p}}}\int_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt \leq C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right), \qquad r>0,$$

где $a = m+k+|\gamma_{k,n}|$, $C-$ постоянная, независящая от r, и

а) если $p>1$, то существует $C>0$ такое, что

$$\left\|\mathrm{I}_B^{\omega} f\right\|_{L_\gamma^{\Phi}\left(R_{m+k,k}^{+}\right)} \leq C\|f\|_{L_{p,\gamma}}, \; f \in L_{p,\gamma}\left(R_{m+k,k}^{+}\right);$$

б) существует $C>0$ такое, что для любой функции $f \in L_{1,\gamma}\left(R_{m+k,k}^{+}\right)$ и для любого $\beta>0$

$$\int\limits_{\left\{x:\left|\mathrm{I}_B^{\omega} f(x)\right|>2\beta\right\}} d\mu(x) \leq \left\{\Phi\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L_\gamma^1}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}.$$

Пусть m+k $\geq$2. Положим m+k=n.При $S \in \{1,\ldots n-1\}$, $R_{n,k}^{+}$ разбиваем на прямую сумму пространств R_{s,k_s}^{+} (точек ${}_sx = (x_{n_1},\ldots x_{n_s})$ с координатами $x_{n_1},\ldots,x_{n_s}$, где $1 \leq n_1 < \ldots < n_s \leq n$, иэти координаты фиксируются для дальнейших рассуждений) и $R_{n-s,(k-k_s)}^{+}$ (с координатами ${}_sx'$), так что$x = \uparrow\left({}_sx,\ {}_sx'\right) \epsilon R_{n,k}^{+}$ (по поводу обозначений см. в ([8])).

Пусть

$m_s = \ rang(\{n_1,\cdots,n_s\} \cap \{1,\cdots,m\}),$

$k_s = rang(\{n_1,\cdots,n_s\} \cap \{m+1,\cdots,m+k\});$

тогда $m_{s,}k_s$ - целые числа, такие что $0 \leq m_s \leq m$, $0 \leq k_s \leq$ k,$m_s + k_s$=s.

Если $m_s > 0$ $(k_s > 0)$, то полагаем

$\{n_1,\cdots,n_s\} \cap \{1,\cdots,m\} = \{j_1,\cdots,j_{m_s}\}, j_1 < \cdots < j_{m_s}$

$(\{n_1,\cdots,n_s\} \cap \{m+1,\cdots,m+k\} = \{m+i_1,\cdots,m+i_{k_s}\}, i_1 < \cdots < i_{k_s});$

тогда, очевидно ${}_sy = (y_{j_1},\cdots,y_{j_{m_s}},y_{m+i_1},\cdots,y_{m+i_{k_s}})$ и

$$d\ {}_sy = dy_{j_1}\cdots dy_{j_{m_s}}dy_{m+i_1}\cdots dy_{m+i_{k_s}}.$$

Для $k_s > 0$ положим

$\gamma_{k_s,s}=\left(\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_{k_s}}\right)$, $|\gamma_{k_s,s}|=\gamma_{i_1}+\dots+\gamma_{i_{k_s}}$, $y^{\gamma_{k_s,s}}=y_{m+i_1}^{\gamma_{i_1}}\cdots y_{m+i_{k_s}}^{\gamma_{i_{k_s}}}$,

$d\mu_{k_s,s}(y)=y^{\gamma_{k_s,s}}d\,_sy$.

В этих обозначениях также полагаем

$m_s'=m-m_s, k_s'=k-k_s$, $R^+_{s,k_s}\equiv R^+_{m_s+k_s,k_s}$, $R^+_{n-s,k-k_s}=R^+_{m_s'+k_s',k_s}$.

Далее $\gamma_{k_s',n-s}$ обозначается и выбирается из равенства $\gamma_{k,n}=\uparrow(\gamma_{k_s,s},\gamma_{k_s',n-s})$, а $y^{\gamma_{k_s',n-s}}$ и $d\mu_{k_s',n-s}(y)$ из равенств $y^{\gamma_{k,n}}\equiv y_{m+1}^{\nu_{m+1}}\dots y_{m+k}^{\nu_{m+k}}=y^{\gamma_{k_s,s}}$. $y^{\gamma_{k_s',n-s}}$ и $d\mu(y)=d\mu_{k_s,s}(y)d\mu_{k_s',n-s}(y)$ соответственно.

При этом считаем, что если $k_s=0$, то множество $\{m+i_1,\dots,m+i_{k_s}\}$ пустое $,m_s=0$ и $\gamma_{k_s,s}=(0,\dots,0)$, $y^{\gamma_{k_s,s}}=1$, $_sy=(y_1,\cdots,y_s), d\mu_{k_s,s}=\ =d\,_sy=dy_1\cdots dy_s$.

Аналогично, считаем при $m_s=0$ множество $\left\{j_1,\dots,j_{m_s}\right\}$ пустое, $k_s=s$,

$_sy=(y_{m+i_1},\cdots,y_{m+i_{k_s}})$, $d\mu_{k_s,s}=$

$y_{m+i_1}^{\gamma_{i_1}}\cdots y_{m+i_{k_s}}^{\gamma_{i_{k_s}}}dy_{m+i_1}\cdots dy_{m+i_{k_s}}=y^{\gamma_{s,s}}d\,_sy.$

В дальнейшем неоднократно будем пользоваться следующими свойствами оператора T^y:

T1) $T^y1=1$; T2)$T^y(Cf)=CT^y(f)$, $C\in R$; T3) Если $|f|\le|g|$, то $T^y(|f|)\le T^y(|g|)$; T4) $(T^y|f|)^p\le T^y(|f|)^p$; T5)$T^{(z,t)}f(x,y)=T_x^z\left(T_y^tf(yx)\right)==T_y^tT_x^z(f(y,x))$.

Всюду в дальнейшем $\omega_s(t)=\omega(t)t^{-\frac{n-s+\left|\gamma'_{k_s,n-s}\right|}{p}}$.

Основной результат работы состоит в следующем

ТеоремаС.

Пусть $s\in\{1,\dots,n-1\}$, $0\le m_s\le m, 0\le k_s\le k$,и $k_s+m_s=s$, $1\le p<\infty$, $\omega_s\in\tilde\Omega_{p,s+|\gamma_{k_s,s}|}$.Тогда существует N – функция Φ такая, что

$$C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{a}}\right)\le \frac{1}{r^{\frac{a}{p}}}\int_0^r \frac{\omega_s(t)}{t}dt\le C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{a}}\right), \qquad r>0,$$

где $a=s+\left|\gamma_{k_s,s}\right|$, $C-$ постоянная, независящая от r ,и

а) если $p>1$, то существует $C>0$ такое, что для любой функции $f\in L_{p,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ и ${}_sx'\in R^+_{k_s',n-s}$

$$\left\|(\mathrm{I}^{\omega}_{B}f)(\bullet,{}_sx')\right\|_{L^{\Phi}_{\gamma_{k_s,s}}\left(R^+_{s,k_s}\right)}\le C\|f\|_{L_{p,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{m+k,k}\right)},$$

б) существует $C>0$ такое, что для любой функции $f\in L_{1,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{n,k}\right)$, для любого $\beta>0$ и ${}_sx'\in R^+_{k_s',n-s}$

$$\int_{\left\{x:\left|(\mathrm{I}^{\omega}_{B}f)(\bullet,{}_sx')\right|>2\beta\right\}} d\mu(x)\le\left\{\Phi\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L_{1,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{n,k}\right)}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}.$$

2.Доказательство теоремы С.

Лемма С. Пусть $s\in\{1,\dots,n-1\}$, $0\le m_s\le m$, $0\le k_S\le k$, $k_s+m_s=s$, $1\le p<\infty$, $\omega\in\tilde{\Omega}_{p,n+\left|\gamma_{k,n}\right|}$. Тогда существует $C_1>0$ такое, что для любой функции $f\in L^{loc}_{1,\gamma_{n,k}}\left(R^+_{n,k}\right)$ и любого $x=\uparrow({}_sx,{}_sx')\in R^+_{n,k}$ справедливо неравенство

$$\int_{R^+_{n,k}} T^y\left(\frac{\omega(x)}{|x|^{n+\left|\gamma_{k,n}\right|}}\right)\cdot|f(y)|\,y_{k,n}^{\gamma_{k,n}}dy\le C_1\int_{R^+_{s,k}} T^{{}_sy}\frac{\omega_s\left(\left|{}_sx\right|\right)}{\left|{}_sx\right|^{s+\left|\gamma_{k_s,s}\right|}}\cdot\left\|f\left({}_sy,\cdot\right)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_s',n-s}}\left(R^+_{n-s,k_s'}\right)}\,y^{\gamma_{k_s,s}}d\,{}_sy.$$

Доказательство. Возможны три случая; 1) $k_S=0$, 2) $k_S=k$, 3) $0<k_S<k$. Рассмотрим случай 3); $0<k_S<k$.Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть $p=1$. Учитывая свойства $\mathrm{T1})-\mathrm{T5})$ оператора обобщенного сдвига T^y и почти убывание $B(t)=\omega(t)t^{-(n+|\gamma_{k,n}|)}$, имеем

$$T^y(B(|x|))=T^{({}_sy,\,{}_sy')}\left(B(|({}_sx,\,{}_sx')|)\right)=T^{{}_sy'}\left(T^{{}_sy}\left(B(|({}_sx,\,{}_sx')|)\right)\right)$$

$$\le T^{{}_sy'}\left(T^{{}_sy}\left(CB(|({}_sx)|)\right)\right)=CT^{{}_sy}\left(B(|({}_sx)|)\right),$$

откуда

$$\int_{R^+_{n,k}} T^y\left(B(|x|)\right)\cdot|f(y)|\,y_{k,n}^{\gamma_{k,n}}dy\le C\int_{R^+_{S,k_S}} T^{{}_sy}\left(B(|{}_sy|)\right)\left(\int_{R^+_{n-s,k_s'}}\left|f({}_sy,{}_sy')\right|{}_sy'^{\gamma_{k_s',n-s}}d\,{}_sy'\right){}_sy^{\gamma_{k_S,S}}d\,{}_sy=$$

$$= \int\limits_{R^+_{S,k}} T^{y_S}\left(B\left(\left|{}_s x\right|\right)\right)\left\| f\left({}_s y\ ,\cdot\right)\right\|_{L_{1,\gamma_{k'_S,n-s}}\left(R^+_{n-s,k'_S}\right)} y^{\gamma_{k_S,S}} d_s y\ .$$

Пусть теперь $p>1$, рассмотрим

$$\int\limits_{R^+_{n,k}} T^y\left(B\left(|x|\right)\right)\cdot\left|f\left(y\right)\right| y^{\gamma_{k,n}}_{k,n}dy = \int\limits_{R^+_{n,k}} T^y\left(B\left(|x|\right)\right)\cdot\left|f\left({}_s y, {}_s y'\right)\right| y^{\gamma_{k,n}}_{k,n}dy =$$

$$= \int\limits_{R^+_{s,k_S}}\left(\int\limits_{R^+_{n-s,k'_S}} T^y\left(B\left(|x|\right)\right)\left|f\left({}_s y, {}_s y'\right)\right|\left({}_s y'\right)^{\gamma_{n-s,k'_S}} d_s y'\right){}_s y^{\gamma_{s,k_S}} d\,{}_s y$$

$$= \int\limits_{R^+_{s,k_S}}\left(F\left(x, {}_s y\right)\right){}_s y^{\gamma_{k_S,s}} d\,{}_s y\ .$$

Применив неравенство Гельдера, получим

$$F\left(x, {}_s y\right) \le \left\|T^y\left(B\left(|x|\right)\right)\right\|_{L_{p',\gamma_{k'_S,n-s}}\left(R^+_{n-s,k'_S}\right)}\left\| f\left({}_s y,\cdot\right)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_S,s}}\left(R^+_{s,k_S}\right)}. \quad (1)$$

Оценим сверху $\left\|T^y\left(B\left(|x|\right)\right)\right\|_{L_{p',\gamma_{k'_S,n-s}}\left(R^+_{n-s,k'_S}\right)}$. Отметим, что

$$T^y\left(B\left(|x|\right)\right) = T^{{}_s y}_{{}_s x}\cdot T^{{}_s y'}_{{}_s x'}\left(B\left[\left(\left|{}_s x\right|^2 + \left|{}_s x'\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right) = C_\gamma\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^\pi T^{{}_s y'}_{{}_s x'}\left(B\left[\left(\left|{}_s x - {}_s y\right|^2_\alpha + \left|{}_s x'\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{i=m_S+1}^{m_S+k_S}\sin^{\gamma_{i-1}}\alpha_1 d\alpha_{m_S+1}\ldots d\alpha_{m_S+k_S}\ ,$$

где $\left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha = \sum\limits_{i=1}^{m_s}\left|x_{j_i} - y_{j_i}\right|^2 + \sum\limits_{l=1}^{k_S}\left(x^2_{m+i_l} - 2x_{m+i_l}y_{m+i_l}\cos\alpha_{i_l} + y^2_{m+i_l}\right)$.

Тогда, применяя обобщенное неравенство Минковского, а затем неравенство Т2), имеем

$$\left\|T^y\left(B\left(|x|\right)\right)\right\|_{L_{p',\gamma_{n-s,k'_S}}\left(R^+_{n-s,k'_S}\right)} \le C\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^\pi J\ \prod_{l=1}^{k_S}\sin^{\gamma_{i_l-1}}\alpha_{i_l}.d\alpha_{i_l}\ , \quad (2)$$

где

$$J = \left[\int\limits_{R^+_{n-s,k'_S}}\left(T^{{}_s y'}_{{}_s x'}\left(B\left[\left(\left|{}_s x - {}_s y\right|^2_\alpha + \left|{}_s x'\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)\right)^{p'}\left({}_s y'\right)^{\gamma_{k'_S,n-s}} d_s y'\right]^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le\left[\int\limits_{R^+_{n-s,k'_S}}\left(B\left[\left(\left|{}_s x - {}_s y\right|^2_\alpha + \left|{}_s x'\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)^{p'}\left({}_s y'\right)^{\gamma_{k'_S,n-s}} d_s y'\right]^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le\left(\int\limits_{R^+_{n-s,k'_s}} B^{p'}\left(\left[\left|{}_sx-{}_sy\right|_\alpha+\left|{}_sy'\right|^2\right]^{\frac12}\right)\cdot\left({}_sy'\right)^{\gamma_{k'_s,n-s}}d_sy'\right)^{\frac{1}{p'}}=$$

$$=\left(\int\limits_{R^+_{n-s,k'_s}}\left[\frac{\omega\left(\left[\left|{}_sx-{}_sy\right|_\alpha+\left|{}_sy'\right|^2\right]^{\frac12}\right)}{\left(\left[\left|{}_sx-{}_sy\right|_\alpha+\left|{}_sy'\right|^2\right]^{\frac12}\right)^{\frac{n+|\gamma_{k,n}|}{p}-\varepsilon}}\cdot\frac{1}{\left(\left[\left|{}_sx-{}_sy\right|_\alpha+\left|{}_sy'\right|^2\right]^{\frac12}\right)^{\frac{n+\gamma_{k,n}}{p'}+\varepsilon}}\right]^{p'}y^{\gamma_{k'_s,n-s}}d_sy'\right)^{\frac{1}{p'}}\le$$

$$\le C\frac{\omega\left(\left|{}_sx-{}_sy\right|\right)}{\left|{}_sx-{}_sy\right|^{\frac{n+|\gamma_{k,n}|}{p}-\varepsilon}}\cdot\left(\int\limits_{R^+_{n-s,k}}\left(\left[\left|{}_sx-{}_sy\right|_\alpha+\left|{}_sy'\right|^2\right]^{\frac12}\right)^{-\left[n+\gamma_{k,n}+\varepsilon p'\right]}y^{\gamma_{k'_s,n-s}}d_sy'\right)^{\frac{1}{p'}},$$

откуда получаем

$$J=C\frac{\omega\left(\left|{}_sx-{}_sy\right|\right)}{\left|{}_sx-{}_sy\right|^{\frac{n+|\gamma_{k,n}|}{p}-\varepsilon}}D.\quad(3)$$

ОценимD:

$$D=\left(\int\limits_{R^+_{n-s,k}}\left(\left[\left|{}_sx-{}_sy\right|_\alpha+\left|{}_sy'\right|^2\right]^{\frac12}\right)^{-\left[n+|\gamma_{k,n}|+\varepsilon p'\right]}y^{\gamma_{k'_s,n-s}}d_sy'\right)^{\frac{1}{p'}}\le$$

$$\le C\left[\int\limits_{R^+_{n-s,k'_s}}\left(1+\frac{\left|{}_sy'\right|}{\left|{}_sx-{}_sy\right|_\alpha}\right)^{-\left(n+|\gamma_{k,n}|\right)}\left({}_sy'\right)^{\gamma_{k'_s,n-s}}d_sy'\right]^{\frac{1}{p'}}\left|{}_sx-{}_sy\right|^{\frac{-\left[n+|\gamma_{k,n}|+\varepsilon p'\right]}{p'}}=.$$

$$=CD_1\left|{}_sx-{}_sy\right|^{\frac{-\left[n+|\gamma_{k,n}|+\varepsilon p'\right]}{p'}},\qquad(4)$$

где $$D_1=\left[\int\limits_{R^+_{n-s,k'_s}}\left(1+\frac{\left|{}_sy'\right|}{\left|{}_sx-{}_sy\right|_\alpha}\right)^{-\left(n+|\gamma_{k,n}|\right)}\left({}_sy'\right)^{\gamma_{k'_s,n-s}}d_sy'\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Оценим сверху D_1

Произведя замену $\dfrac{{}_s y'}{\left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha} = {}_s z'$ $({}_s y' \to {}_s z')$, имеем $\left({}_s y'\right)^{\gamma_{k_s',n-s}} d\,{}_s y' = \left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha^{\left|\gamma_{k_s',n-s}\right|} \left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha^{n-s} \left({}_s z'\right)^{\gamma_{k_s'}} d_s z'$, откуда получаем

$$D_1 = \left|{}_s x - {}_s y\right|_{\alpha_{k_s,s}}^{\frac{n-s+\left|\gamma_{k_s',n-s}\right|}{p'}} \left(\int\limits_{R^+_{n-s,k_s'}} \left(1+\left|{}_s z'\right|\right)^{-\left(n+\left|\gamma_{k,n}\right|\right)} \left({}_s z'\right)^{\gamma_{k_s',n-s}} d_s z' \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha^{\frac{n-s+\left|\gamma_{k_s',n-s}\right|}{p'}} D_{11}. \quad . \tag{5}$$

Переходя к сферическим координатам ${}_s z' = t\theta$, получаем

$$D_{11} = \left(\int\limits_S ds \int\limits_0^\infty \left(1+t\right)^{-\left(n+\left|\gamma_{k,n}\right|\right)} t^{\left|\gamma_{k',n-s}\right| + \left[(n-s)-1\right]} dt \right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{6}$$

и этот интеграл сходится, так как функция

$$\left(1+t\right)^{-\left(n+\left|\gamma_{k,n}\right|\right)} t^{\left|\gamma_{k_s',n-s}\right| + \left[(n-s)-1\right]}$$

при $t \to 0$ имеет порядок $\left|\gamma_{k_s'',n-s}\right| + \left[\left(n-s\right)-1\right] > 0$, а при $t \to \infty$ имеет порядок $-\left(n+\left|\gamma_{k,n}\right|\right) + \left|\gamma_{k',n-s}\right| + \left[\left(n-s\right)-1\right] \le -\left(s+1\right) \le -2$.

Таким образом, учитывая (5) и (4), из (3)получаем

$$J = C \frac{\omega\left(\left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha\right)}{\left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha^{n+\left|\gamma_{k,n}\right|}} D \le C \frac{\omega\left(\left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha\right)}{\left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha^{n+\left|\gamma_{k,n}\right|}} \cdot \left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha^{\frac{n-s+\left|\gamma_{k_s',n-s}\right|}{p'}},$$

и потому, полагая $\beta = n + \left|\gamma_{k,n}\right| - \dfrac{h-s+\left|\gamma_{k_s',h-s}\right|}{p'}$, имеем

$$\left\| T^y\left(B\left(\left|x\right|\right)\right) \right\|_{L_{p',\gamma_{k_s'},n-s}\left(R^+ n-s,k_s\right)} \le C \int\limits_0^\Pi \ldots \int\limits_0^\Pi J \prod_{i=1}^{k_S} \left(\sin^{\gamma_{m_s+i}-1} \alpha_i d\,\alpha_1\right) \le$$

$$\le C \int\limits_0^\Pi \ldots \int\limits_0^\Pi \frac{\omega\left(\left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha\right)}{\left|{}_s x - {}_s y\right|_\alpha^\beta} \cdot \prod_{i=1}^{k_S} \left(\sin^{\gamma_{m_s+i}-1} \alpha_i d\,\alpha_i\right) = C T_{{}_s x}^{{}_s y} \left(\frac{\omega_s\left(\left|{}_s x\right|\right)}{\left|{}_s x\right|^{s+\left|\gamma_{k_s,s}\right|}} \right).$$

Здесь мы учитываем , что

$$\beta = n + \left|\gamma_{k,n}\right| - \left(h - s + \left|\gamma_{k_s',n-s}\right|\right) + \frac{h-s+\left|\gamma_{k_s',h-s}\right|}{p} = s + \left|\gamma_{k_s,s}\right| + \frac{h-s+\left|\gamma_{k_s',h-s}\right|}{p}.$$

Таким образом, если $p > 1$, то

$$\int_{R^+_{n,k}} T^y \left(\frac{\omega(|x|)}{|x|^{n+|\gamma_{k,n}|}}\right)\cdot |f(y)|\, y_{k,n}^{\gamma_{k,n}}\, dy \le C \int_{R^+_{s,k}} T^{_s y}_{_s x} \frac{\omega_s(|_s x|)}{|_s x|^{s+|\gamma_{k_s,s}|}} \cdot \|f(_s y,\cdot)\|_{L_{p,\gamma_{k'_s,h-s}}} (_s y)^{\gamma_{k,n}}\, d_s y$$

Этим лемма доказана полностью.

Эта лемма является отправным пунктом для доказательства аналогов второй теоремы Соболева о потенциалах([8]). Теорема С является одной из них. Теорема С непосредственно следует из Леммы С применением Теоремы А, и с учетом того, что из $\omega_s \in \tilde{\Omega}_{p,s+|\gamma_{k_s,s}|}$ следует $\omega_s \in \tilde{\Omega}_{p,s+|\gamma_{k_s,s}|}$.

Отметим, что если $\omega(t) = t^{\propto}$, то из теоремыС следуют все результаты работы ([9]), где случай $0 < k_s < k, 0 < m_s < m$ не был рассмотрен.

ЛИТЕРАТУРА

1.Левитан Б.М.. // Успехи Матем. Наук, 1951, 6, №2, с.102-143.

2.Sadig K. Abdullayev, Bakhruz K. Agarzayev. //Trans. of NAS of Azerbaijan, series of Phys.-Tech. and Mathem. sciences, v.XXV, №4, Baku, 2005, p.3-8

3.Алиев И.А., Гаджиев А.Д. // Док. Расш. Засед. Сем. Инт-та приклад. Матем. им. И.Н.Векуа, 1988, т. 3, №2.

4.М.А.Красносельский, Я.Б.Рутицкий. Выпуклые функции и пространства Орлича. Физматгиз. М., 1958, 271 с.

5.С.К.Абдуллаев, М.К.Керимов.// Вестник Бакинского университета Серия физ.-мат.наук № 1. 2008 г. с. 5-11

6. С.К.Абдуллаев, Б.К.Агарзаев // BDU-nun Hesab. Riy. kaf.-nın 50 illik yubiley. həsr olunmuş elmi konf-n mater. Bakı, 15-16 noyabr 2012-ci il, s.85-90.

7. E.Nakai and H.Sumitomo.//Scien. Math. Japan. 2001, v. 54, p.463-472.

8.С.Л.Соболев. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974, 808 с.

9. Гулиев В.С., Гараханова Н.Н. // Сибирск.Мат.Журн. 2009, т.50, №1.

ÜMUMİLƏŞMİŞ SÜRÜŞMƏ VƏ SANKİ MONOTON NÜVƏ İLƏ RİSS POTENSİALLARI ÜÇÜN SOBOLYEV TEOREMİ

S.K.ABDULLAYEV, B.K.AĞARZAYEV

XÜLASƏ

İşdə Laplas-Bessel diferensial operatorunun doğurduğu sürüşmə və sanki monoton nüvə ilə Riss potensialları üçün Sobolevin ikinci teoreminin analoqları isbat olunmuşdur. Burada sürüşmə operatoru dəyişənlərin ixtiyari yığımına görə götürülür.

Açar sözlər: Riss potensialı, ümumiləşmiş sürüşmə, Orliç fəzası, sanki monoton nüvə

SOBOLEV TEOREM FOR GENERALIZED RISS POTENTIALS WITH GENERALIZED SHIFT AND ALMOST MONOTONOUS KERNEL

S.K.ABDULLAYEV, B.K.AGARZAYEV

SUMMARY

In this work the analogue of the second theorem of Sobolev for Riss potensials with generalized shift and almost monotonous kernel, associated with the Laplas-Bessel differential operator is establihed. The case when the operator of the generalized shift takes on any of variables is considered.

Key words: Riss potential, generalized shift, almost monotonous kernel

Поступила в редакцию: 20.05.2013 г.
Подписано к печати: 24.05.2013 г.